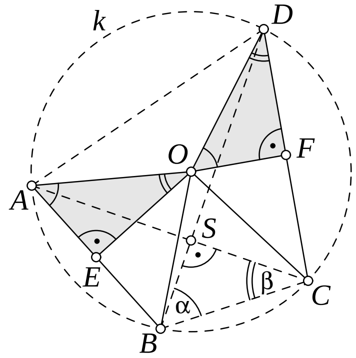
W.22 Die Punkte A, B, C und D liegen so auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt O, daß sie Eckpunkte eines Sehnenvierecks sind, dessen Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen. Man beweise, daß die Seite CD doppelt so lang wie der Abstand des Punktes O von der Seite AB ist.
(*38. Mathematik-Olympiade 1998/99, Klasse 11–13, Stufe 3*)

W.22 *Beweis:* (Bild) E, F seien die Lotfußpunkte von O auf die Seiten AB und CD, S der Schnittpunkt beider Diagonalen. Nun sind die Dreiecke AOB und COD gleichschenklig und werden somit durch ihre Höhen OE bzw. OF in zwei Paare kongruenter rechtwinkliger Dreiecke zerlegt:

$$\triangle AOE \cong \triangle BOE, \qquad \triangle COF \cong \triangle DOF. \tag{W.114}$$



Wenn es uns noch gelingt, die Kongruenz aller vier obigen Dreiecke nachzuweisen, sind wir schon fertig. Bezeichnen wir die Winkel $\measuredangle DBC \equiv \alpha$ und $\measuredangle ACB \equiv \beta$, so ist nach Voraussetzung $\alpha + \beta = 90°$. Aus dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz folgt $\measuredangle DOC = 2\alpha$, somit wegen (W.114) $\measuredangle DOF = \alpha$ und aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ODF: $\measuredangle ODF = \beta$. Analog erhalten wir $\measuredangle AOE = \beta$ und $\measuredangle OAE = \alpha$. Schließlich stimmen beide Dreiecke AOE und ODF in ihren Hypotenusen $AO = OD$ überein, sind daher in der Tat kongruent (WSW). Daraus folgt unmittelbar $CD = 2DF = 2OE$. □ Vgl. auch Aufgabe V.24.