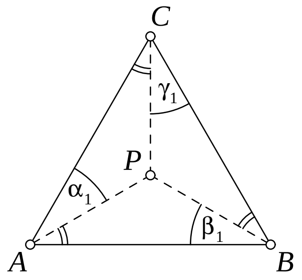
$\boxed{\text{W.24}}$ Über ein Dreieck ABC werde vorausgesetzt, daß in seinem Innern ein Punkt P liegt, für den alle drei Winkel $\measuredangle BAP = \measuredangle CBP = \measuredangle ACP$ die Größe 30° haben. Man zeige, daß $\triangle ABC$ gleichseitig ist.
(*39. Mathematik-Olympiade 1999/2000, Klasse 11–13, Stufe 4*)

W.24 *Beweis:* (Bild) Aufmerksamen Lesern wird die Kombination der gegebenen Winkel bekannt vorkommen: In Aufgabe D.32 tritt sie in der trigonometrischen Form des Satzes von CEVA auf. Demnach gilt mit den jeweils gegenüberliegenden Winkeln α_1, β_1 und γ_1:



$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = (\sin 30°)^3 = \frac{1}{8}.$$

Wenn wir zeigen können, daß alle drei Faktoren untereinander gleich sind, wären wir schon fertig. Diese Forderung erinnert uns jedoch an Ungleichungen, insbesondere die AM-GM-Ungleichung (U.24):

$$\frac{1}{2} = \sqrt[3]{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1} \leq \frac{1}{3}\left(\sin\alpha_1 + \sin\beta_1 + \sin\gamma_1\right).$$

Die Summe der Sinuswerte ruft nun die JENSENsche Ungleichung (U.42) für die im Intervall $[0, \pi]$ konkave Sinusfunktion auf den Plan:

$$\frac{1}{2} = \sqrt[3]{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1} \leq \frac{1}{3}\left(\sin\alpha_1 + \sin\beta_1 + \sin\gamma_1\right) \leq \sin\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

wegen $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 90°$. Ein Vergleich des linken und rechten Endes der Ungleichungskette läßt uns aufatmen, denn die Ungleichungen müssen zwangsläufig zu Gleichungen werden. Aus der Bedingung für Gleichheit in der AM-GM-Ungleichung folgt nun: $\sin\alpha_1 = \sin\beta_1 = \sin\gamma_1$ und schließlich wegen $0 < \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \leq 90°$ die Behauptung $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 30°$, d. h., alle Innenwinkel des Dreiecks ABC betragen $60°$; es ist mithin gleichseitig. $\square$