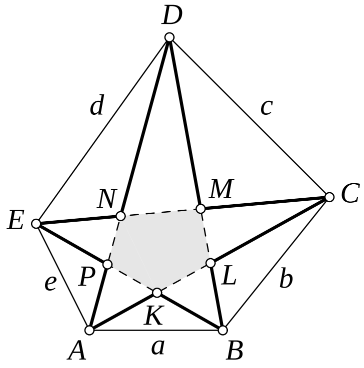
$\boxed{\text{W.3}}$ Beweisen Sie: In jedem konvexen Fünfeck gelten die Ungleichungen

$$u < s < 2u.$$

Dabei bezeichne u den Umfang des Fünfecks und s die Summe der Diagonalenlängen.
(*39. Mathematik-Olympiade 1999/2000, Klasse 9/10, Stufe 3*)

W.3 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen die Seitenlängen des Fünfecks wie im Bild angegeben mit a, b, c, d, e sowie die Schnittpunkte der Diagonalen untereinander mit K, L, M, N, P. Es ist klar, daß uns nur die Dreiecksungleichungen schnell ans Ziel bringen.

a) Um die rechte Ungleichung $2u > s$ zu zeigen, müssen wir Teildreiecke finden, die aus jeweils zwei Seiten (zu u gehörend) und einer Diagonalen (zu s gehörend) bestehen:



$$a + b > AC, \quad b + c > BD, \quad c + d > CE,$$

$$d + e > DA, \quad e + a > EB.$$

Durch Addition dieser Ungleichungen und mit $s \equiv AC + BD + CE + DA + EB$ folgt unmittelbar $2u > s$.

b) Bei der zweiten Ungleichung $u < s$ ist genau umgekehrt vorzugehen: Jetzt dürfen nur jeweils eine Dreieckseite auf der „Kleiner"seite der Ungleichung, die Diagonalenlängen müssen dagegen auf der „Größer"seite stehen:

$$a < AK + KB, \quad b < BL + LC, \quad c < CM + MD,$$

$$d < DN + NE, \quad e < EP + PA.$$

Die Summe der rechten Seiten $s' \equiv AK+KB+BL+LC+CM+MD+DN+NE+EP+PA$ ist nun offenbar kleiner als s, da an s der Umfang des kleinen eingeschlossenen Fünfecks $KLMNP$ gerade fehlt. Mithin haben wir $u < s' < s$. $\square$