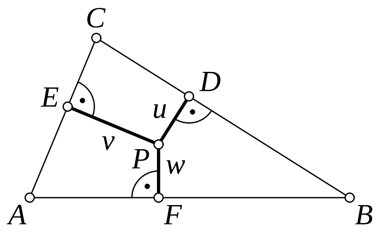
W.32 Man bestimme die Punkte P im Innern eines Dreiecks ABC, für die das Produkt $PD \cdot PE \cdot PF$ maximal wird, wobei D, E und F die Lotfußpunkte der Lote von P auf die Dreieckseiten BC, CA bzw. AB sind.
(*Großbritannien, 1978*)

W.32 (Bild) Schreiben wir zur Abkürzung $PD \equiv u$, $PE \equiv v$ und $PF \equiv w$, so lautet die Forderung $uvw \Rightarrow$ Max. Wir brauchen nur noch irgendeine Nebenbedingung in den Längen u, v, w, um eine der Standard-Ungleichungen anwenden zu können. Das ist natürlich der Flächeninhalt, für den offenbar



$$2\Delta = au + bv + cw = \text{const}$$

gilt. Nun genügt bereits eine einmalige Anwendung der AM-GM-Ungleichung, um die Lösung zu finden:

$$2\Delta = au + bv + cw \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}(uvw)^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{oder} \qquad uvw \leq \frac{8\Delta^3}{27abc} = \frac{2}{27}\frac{\Delta^2}{R}.$$

In der letzten Umformung wurde das Ergebnis $abc = 4R\Delta$ von Aufgabe D.64 benutzt. Die AM-GM-Ungleichung sagt uns auch, wann Gleichheit auftritt, das Produkt also seinen Maximalwert annimmt: $au = bv = cw$. Da diese Terme gerade die doppelten Flächeninhalte der Teildreiecke BCP, CAP und ABP sind (vgl. Aufgabe D.11), folgt daraus, daß der gesuchte Punkt P der *Schwerpunkt* des Dreiecks ABC ist. Siehe auch Aufgabe W.52.