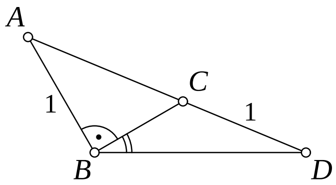
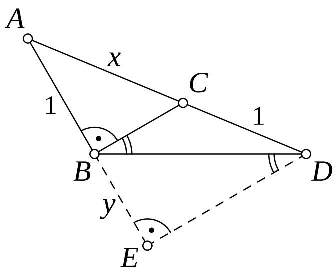
W.38 In der im Bild gezeigten Figur haben die Strecken AB und CD die Länge 1; die Winkel $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle CBD$ betragen $90°$ bzw. $30°$. Wie lang ist AC?
(*Kanada, 1986*)



W.38 (Bild) Wir zeichnen eine Parallele zu BC durch D; diese schneide die Verlängerung von AB in E. Mit den Bezeichnungen $AC \equiv x$ und $BE \equiv y$ können wir dann mit Hilfe des Strahlensatzes unmittelbar die Beziehung $x : 1 = 1 : y$ oder $xy = 1$ ablesen. Nun ist $\triangle BED$ rechtwinklig mit $\measuredangle EDB = \measuredangle CBD = 30°$; dessen Hypotenuse wegen $\sin 30° = \frac{1}{2}$ somit $BD = 2y$ und nach dem Satz des PYTHAGORAS $ED = \sqrt{3}y$. Die Länge der Strecke BC erhalten wir, indem wir den zweiten Strahlensatz anwenden:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{ED}{AE}, \quad \text{oder} \quad BC = \frac{\sqrt{3}y}{y+1}.$$



Der Kosinussatz für das Dreieck CBD lautet jetzt:

$$1^2 = \frac{3y^2}{(y+1)^2} + 4y^2 - 2\frac{\sqrt{3}y}{y+1}(2y)\cos 30°,$$

woraus nach Multiplikation mit $(y+1)^2$ und mit $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(y+1)^2 = 3y^2 + 4y^2(y+1)^2 - 6y^2(y+1) \quad \text{bzw.} \quad 4y^4 + 2y^3 - 2y - 1 = 0$$

folgt. Das geübte Auge erkennt im letzten Polynom in y den Faktor $(2y+1)$, also

$$4y^4 + 2y^3 - 2y - 1 = (2y+1)(2y^3 - 1) = 0.$$

Nullsetzen des ersten Faktors liefert $y = -\frac{1}{2}$ (ungültige Lösung), somit bleibt $y^3 = \frac{1}{2}$. Diese Gleichung dritten Grades hat eine reelle Lösung $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (die anderen beiden sind konjugiert komplex). Wegen $xy = 1$ beträgt die gesuchte Länge daher $AC = x = \sqrt[3]{2}$.