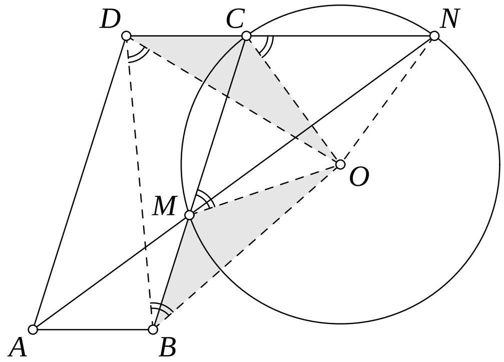
$\boxed{\text{W.40}}$ $ABCD$ sei ein Parallelogramm. Die Winkelhalbierende von $\measuredangle DAB$ schneide die Seite BC in M sowie die Verlängerung von CD in N. Der Umkreismittelpunkt von $\triangle MCN$ sei O. Zeige, daß B, O, C, D auf einem gemeinsamen Kreis liegen. (*Lettland, 1997*)

W.40 *Beweis:* (Bild) Es genügt zu zeigen, daß $BOCD$ ein Sehnenviereck ist, in dem

$$\measuredangle DBO + \measuredangle DCO = 180^\circ \quad \text{und somit} \quad \measuredangle DBO = \measuredangle OCN$$

gilt. Zunächst läßt sich feststellen, daß der Winkel



$$\begin{aligned} \measuredangle DAM = \measuredangle BAM &= \measuredangle AMB \\ &= \measuredangle CMN = \measuredangle MNC \end{aligned}$$

mehrfach als Wechsel-, Stufen- und Scheitelwinkel auftritt. Dies „enttarnt“ die Dreiecke ABM und MCN aufgrund gleicher Basiswinkel sofort als gleichschenklige; letzteres hat $MC = CN$ zur Folge. Wegen $MO = CO = NO$ ist weiterhin $\triangle MOC \cong \triangle CON$. Dies genügt, um die Deckungsgleichheit (SWS) von $\triangle BMO$ und $\triangle DCO$ nachzuweisen (der jeweils gleiche Winkel ist der Außenwinkel). Mithin ist auch $\triangle BOD$ gleichschenklig, und zwar mit denselben Basiswinkeln wie $\triangle CON$, d. h., beide lassen sich durch eine *Drehstreckung* ineinander überführen. Daraus folgt unmittelbar – wie oben gefordert – $\measuredangle DBO = \measuredangle OCN$. $\square$