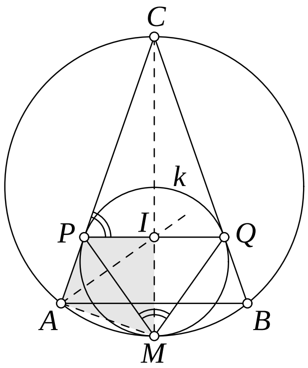
$\boxed{\text{W.51}}$ Im $\triangle ABC$ sei $AC = BC$. Ein Kreis k liegt so, daß er den Umkreis des Dreiecks ABC von innen berührt, und die Seiten AC, BC Tangenten an k mit den Berührungspunkten P, Q sind. Man beweise, daß der Mittelpunkt von PQ der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist.
(*20. IMO, Rumänien, Bukarest, 1978*)

W.51 *Beweis:* (Bild) Wegen $AC = BC$ ist unsere Figur symmetrisch bezüglich des Durchmessers CM des Umkreises, wobei M der Berührungspunkt von k mit dem Umkreis ist. Nun halbiert CM den Scheitelwinkel $\measuredangle ACB$, den Winkel $\measuredangle PMQ$ sowie die Strecke PQ, welche



wegen $PC = QC$ und der daraus folgenden Ähnlichkeit der Dreiecke ACB und PCQ parallel zu AB ist, und deren Mittelpunkt wir mit I bezeichnen. Für die Basiswinkel in beiden gleichschenkligen Dreiecken schreiben wir $\measuredangle CPQ = \measuredangle CAB \equiv 2\beta$. Nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz ist daher auch $\measuredangle PMQ = \measuredangle CPQ = 2\beta$, also $\measuredangle PMI = \frac{1}{2}\measuredangle PMQ = \beta$. Weiterhin ist $AMIP$ wegen $\measuredangle CAM = \measuredangle PAM = 90°$ und $\measuredangle PIM = 90°$ ein Sehnenviereck, in dem $\measuredangle PMI = \measuredangle PAI = \beta$ gleich große Peripheriewinkel sind. Somit halbiert AI den Innenwinkel $\measuredangle CAB$. I ist folglich als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$. $\square$