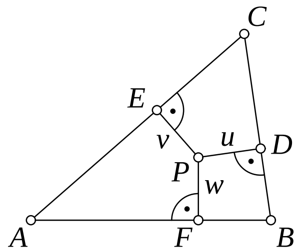
W.52 P sei ein Punkt im Innern eines gegebenen Dreiecks ABC. Die Lotfußpunkte von P auf den Seiten BC, CA und AB des Dreiecks seien D, E bzw. F. Man bestimme alle P, für die folgender Ausdruck minimal wird:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

(*22. IMO, USA, Washington D. C., 1981*)

W.52 (Bild) Die Seitenlängen des Dreiecks seien wie üblich $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$; die Längen der Lote $PD \equiv u$, $PE \equiv v$, $PF \equiv w$. Dann gilt für den Flächeninhalt Δ des Dreiecks ABC:



$$2\Delta = au + bv + cw.$$

Die Aufgabe verlangt somit, den Ausdruck

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}$$

zu minimieren. Die einfachste Möglichkeit dies zu erreichen, ist die Ausnutzung der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung (vgl. Aufgabe U.23) unter Verwendung der beiden Tripel $(\sqrt{au},\ \sqrt{bv},\ \sqrt{cw})$ und $(\sqrt{a/u},\ \sqrt{b/v},\ \sqrt{c/w})$. Demnach ist

$$(a+b+c)^2 \leq (au+bv+cw)\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}\right) = 2\Delta\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}\right),$$

oder

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2\Delta}. \tag{W.120}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die Tripel $(\sqrt{au}, \sqrt{bv}, \sqrt{cw})$ und $(\sqrt{a/u}, \sqrt{b/v}, \sqrt{c/w})$ zueinander proportional sind, d. h. genau dann, wenn $u = v = w$ ist. Der Ausdruck (W.120) wird folglich minimal, wenn P der *Inkreismittelpunkt* von $\triangle ABC$ ist. Siehe auch Aufgabe W.32.