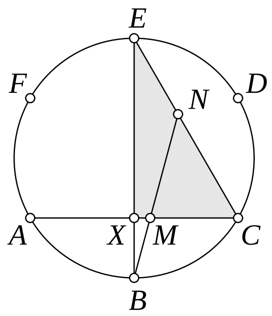
W.53 Die Diagonalen AC und CE eines regulären Sechsecks $ABCDEF$ werden durch die auf ihnen liegenden Punkte M und N so geteilt, daß

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

gilt. Man bestimme r, wenn B, M und N kollinear sind.
(*23. IMO, Ungarn, Budapest, 1982*)

W.53 (Bild) Angenommen, B, M und N sind kollinear und jede Seite des Sechsecks habe die Länge eins. Es bietet sich an, r mit Hilfe des Satzes von MENELAUS (s. Aufgabe D.43) zu bestimmen. Dazu sei X der Schnittpunkt von AC mit BE. Die Punkte B, M und N müssen nun auf den (gegebenenfalls verlängerten) Seiten eines Dreiecks liegen; wir finden das Dreieck CEX als ein solches und schreiben den Satz von MENELAUS hierfür hin:



$$\frac{CN}{NE} \cdot \frac{EB}{BX} \cdot \frac{XM}{MC} = -1. \qquad \text{(W.121)}$$

Nun versuchen wir, jede dieser Längen durch r auszudrücken. Mit $AC = CE = \sqrt{3}$, $AX = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $EB = 2$ und $BX = -\frac{1}{2}$ (das Minuszeichen rührt vom entgegengesetzten Richtungssinn zu EB) errechnen wir:

$$CN = AM = \sqrt{3}\,r, \quad NE = CE - CN = \sqrt{3}\,(1-r),$$

$$XM = AM - AX = \sqrt{3}\left(r - \frac{1}{2}\right), \quad MC = AC - AM = \sqrt{3}\,(1-r).$$

Dies in (W.121) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\sqrt{3}\,r}{\sqrt{3}\,(1-r)} \cdot \frac{2}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}\,(r-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}\,(1-r)} = -1 \qquad \text{oder} \qquad 4r\left(r - \frac{1}{2}\right) = (1-r)^2,$$

woraus schließlich $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt.