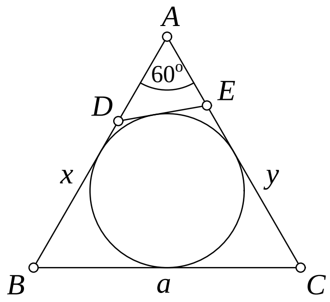
W.61 Eine Gerade, die den Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC berührt, schneide die Seiten AB und AC in den Punkten D bzw. E. Zeige, daß

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

(*8. Iberoamerikanische Mathematik-Olympiade, Mexiko 1993*)

W.61 *Beweis:* (Bild) DE teilt das gleichseitige Dreieck ABC in ein Tangentenviereck $BCED$ und ein kleineres Dreieck ADE. Mit $BD \equiv x$, $CE \equiv y$ und $a \equiv AB = BC = CA$ folgt nach Aufgabe V.31: $DE = x + y - a$. Andererseits ist nach dem Kosinussatz im Dreieck ADE

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos 60° \\ &= (a-x)^2 + (a-y)^2 - 2(a-x)(a-y) \cdot \frac{1}{2} \\ &= a^2 - a(x+y) + (x+y)^2 - 3xy. \end{aligned}$$



Gleichsetzen beider Ausdrücke für DE^2 liefert:

$$a = \frac{3xy}{x+y}.$$

Damit erhalten wir mit obigen Abkürzungen†

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = \frac{a-x}{x} + \frac{a-y}{y} = a\frac{x+y}{xy} - 2 = 3 - 2 = 1. \quad \square$$

Vgl. auch Aufgabe W.84.

† $x \equiv AD$, $y \equiv AE$ zu setzen ist die schlechtere Wahl, da dann die Differenzen im Nenner stehen.