$\boxed{\text{W.7}}$ Beweisen Sie, daß für jedes spitzwinklige $\triangle ABC$ die folgende Aussage gilt:
Sind D, E und F die Fußpunkte der auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen, so ist

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = FB^2 + DC^2 + EA^2.$$

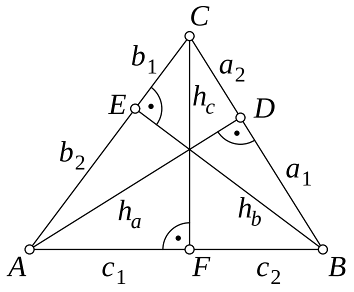
Untersuchen Sie ferner, ob die Gleichung auch für jedes rechtwinklige $\triangle ABC$ gilt.
(*35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klasse 9, Stufe 4*)

W.7 *Beweis:* (Bild) In jedem spitzwinkligen $\triangle ABC$ gelten mit den üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Seitenlängen und den weiteren Bezeichnungen im Bild nach dem Satz des PYTHAGORAS die Gleichungen

$$b^2 = c_1^2 + h_c^2 = a_2^2 + h_a^2, \tag{W.101}$$

$$c^2 = a_1^2 + h_a^2 = b_2^2 + h_b^2, \tag{W.102}$$

$$a^2 = b_1^2 + h_b^2 = c_2^2 + h_c^2. \tag{W.103}$$



Nach Addition der rechts stehenden Gleichungen und Subtraktion von $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$ folgt die behauptete Gleichung $c_1^2 + a_1^2 + b_1^2 = c_2^2 + a_2^2 + b_2^2$.

Ist für rechtwinklige Dreiecke der rechte Winkel etwa bei C, so gelten die zweite Gleichung in (W.101) wegen $a_2 = 0$, $h_a = b$ und die erste Gleichung in (W.103) wegen $b_1 = 0$, $h_b = a$ ebenfalls (und die Gleichungen (W.102) sind die gleiche Aussage wie $c^2 = a^2 + b^2$). $\square$

Bemerkung: Die behauptete Gleichung gilt, mit gleicher Herleitung wie für spitzwinklige Dreiecke, auch für stumpfwinklige Dreiecke.