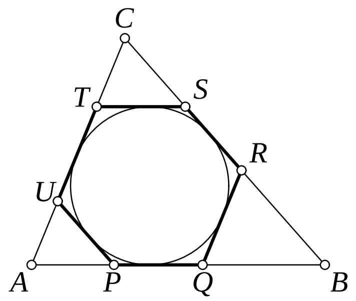
W.81 (Bild) Im $\triangle ABC$ werden diejenigen Tangenten an den Inkreis gezeichnet, die parallel zu den Seiten des Dreiecks sind. Dadurch entsteht das Sechseck $H \equiv PQRSTU$. Man beweise, daß der Umfang von H niemals größer als $\frac{2}{3}$ des Umfangs des Dreiecks ABC ist. (*Crux Mathematicorum 189*, 1988)



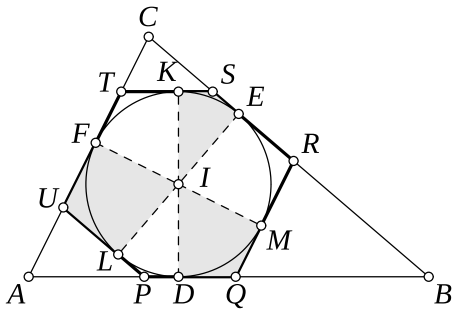
W.81 *Beweis:* (Bild) Die Berührungspunkte des Inkreises (Radius r) mit den Seiten $AB \equiv c$, $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ bezeichnen wir mit D, E bzw. F; die mit den Tangentenabschnitten $ST \parallel AB$, $UP \parallel BC$ und $QR \parallel CA$ mit K, L bzw. M. Wir erkennen nun leicht, daß das Sechseck in drei Paare kongruenter Drachenvierecke

$$KSEI \cong DPLI, \quad ERMI \cong LUFI, \quad MQDI \cong FTKI$$

zerfällt. Daß z. B. $KSEI$ ein Drachenviereck ist, folgt aus dem Kongruenzsatz SSS für $\triangle KSI \cong \triangle ESI$ (gemeinsame Seite SI, $KI = EI = r$ und gleich lange Tangentenabschnitte $SK = SE$); durch eine 180°-Drehung von $KSEI$ um I geht es in $DPLI$ über, also $KSEI \cong DPLI$. Damit ist gezeigt, daß jeweils gegenüberliegende Seiten des Sechsecks gleich lang sind:

$$UP = RS \equiv a', \quad QR = TU \equiv b', \quad ST = PQ \equiv c',$$

wobei $s' \equiv a' + b' + c'$ der halbe Umfang des Sechsecks ist. Weiterhin ist $\triangle CTS \sim \triangle CAB$, und mit der Höhe h_c als Länge des Lotes von C auf AB (und entsprechend h'_c in $\triangle CTS$) erhalten wir:



$$\frac{TS}{AB} = \frac{c'}{c} = \frac{h'_c}{h_c} = \frac{h_c - 2r}{h_c} = 1 - \frac{2r}{h_c}.$$

Daraus folgt mit $\Delta = rs$ für die Fläche eines Dreiecks

$$\frac{1}{2}ch_c = rs, \quad \frac{2r}{h_c} = \frac{c}{s}, \quad \text{somit} \quad c' = c - \frac{c^2}{s}.$$

Mit analogen Ausdrücken für a' und b' wird

$$s' = a' + b' + c' = (a + b + c) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} = 2s - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s}. \qquad \text{(W.122)}$$

Es bleibt noch, $a^2 + b^2 + c^2$ durch den Umfang des Dreiecks $2s \equiv a + b + c$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0,\\
2(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2ab + 2bc + 2ca\\
3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2 = 4s^2\\
\frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} \geq \frac{4s}{3}, \qquad -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} &\leq -\frac{4s}{3}.
\end{aligned}$$

Nach (W.122) ist schließlich $s' \leq 2s - \frac{4}{3}s = \frac{2}{3}s$. $\square$