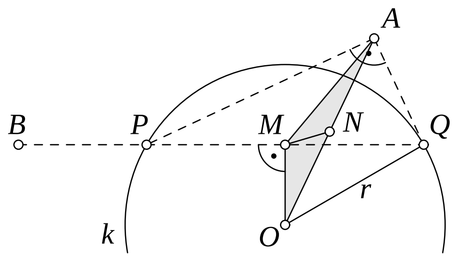
$\boxed{\text{W.83}}$ In der Ebene sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r sowie zwei weitere Punkte A und B außerhalb von k gegeben. Es ist eine Sehne PQ zu konstruieren, die von A aus unter einem rechten Winkel erscheint und deren Verlängerung durch B geht.
(*Crux Mathematicorum 1188*, 1988)

W.83 (Bild) Angenommen, PQ ist eine Sehne, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt; M sei deren Mittelpunkt. Wenn es uns also gelingt, M zu konstruieren, schneidet die Gerade durch B und M den Kreis k in den gesuchten Punkten P und Q, und das Problem ist gelöst. Nun steht jede Sehne PQ senkrecht auf OM, also ist $\measuredangle BMO = 90°$, und M liegt somit auf dem THALES-Kreis über dem Durchmesser BO. Um einen zweiten geometrischen Ort für M zu finden, bemerken wir, daß im rechtwinkligen Dreieck PAQ der Mittelpunkt M der Hypotenuse PQ stets gleiche Abstände zu den drei Eckpunkten hat:

$$MP = MA = MQ.$$



Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt:

$$r^2 = OM^2 + MQ^2 = OM^2 + MA^2.$$

Damit haben wir eine Gleichung für die Längen OM und MA im Dreieck OMA. Eine zweite finden wir, indem wir den Mittelpunkt N der gegebenen Strecke OA betrachten. Dann ist MN die Länge der Seitenhalbierenden, für die bekanntlich (vgl. Lösung zu Aufgabe D.70 a) gilt:

$$r^2 = OM^2 + MA^2 = 2MN^2 + \frac{1}{2}OA^2, \quad \text{oder} \quad MN = \sqrt{\frac{r^2}{2} - \frac{OA^2}{4}}.$$

Die Länge der Strecke MN kann damit aus den gegebenen Längen r und OA konstruiert werden (indem z. B. ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge r und einer Kathetenlänge $\frac{1}{\sqrt{2}}OA$ gezeichnet wird; die andere Kathete hat dann die Länge $\sqrt{2}\,MN$). Der zweite geometrische Ort für M ist somit ein Kreis um N mit dem Radius MN. Die Aufgabe hat also zwei, eine oder gar keine Lösung.