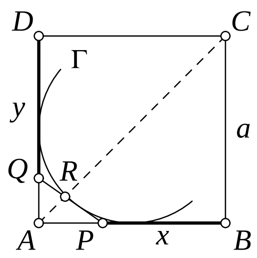
W.84 $ABCD$ sei ein Quadrat mit dem Inkreis Γ. Eine Tangente l an Γ schneide AB und AD sowie die Diagonale AC in den Punkten P, Q bzw. R. Beweise, daß

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AR}{RC} + \frac{AQ}{QD} = 1.$$

(*Crux Mathematicorum 2114*, März 1996)

W.84 *Beweis:* (Bild) Die Seitenlänge des Quadrats sei a, außerdem benutzen wir $PB \equiv x$ und $QD \equiv y$. Mit $AP = a - x$, $AQ = a - y$ und $PQ = x + y - a$ liefert der Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck APQ:



$$(a-x)^2 + (a-y)^2 = (x+y-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2\,xy = a^2. \quad \text{(W.123)}$$

Ferner ist AR Winkelhalbierende im Dreieck APQ. Nach (D.108) erhalten wir (nach kurzer Rechnung)

$$AR^2 = \frac{a^2}{2}\left[\frac{3a - 2(x+y)}{2a - (x+y)}\right]^2$$

und weiter

$$AR = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{3a - 2(x+y)}{2a - (x+y)}, \quad RC = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{a}{2a - (x+y)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{AR}{RC} = 3 - 2\,\frac{x+y}{a}.$$

Damit wird

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QD} = \frac{a-x}{x} + \frac{a-y}{y} = a\,\frac{x+y}{xy} - 2 = 2\,\frac{x+y}{a} - 2.$$

Dabei wurde das obige Resultat (W.123) benutzt. Schließlich folgt:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QD} + \frac{AR}{RC} = \left(2\,\frac{x+y}{a} - 2\right) + \left(3 - 2\,\frac{x+y}{a}\right) = 1. \quad \square$$

Vgl. auch Aufgabe W.61.