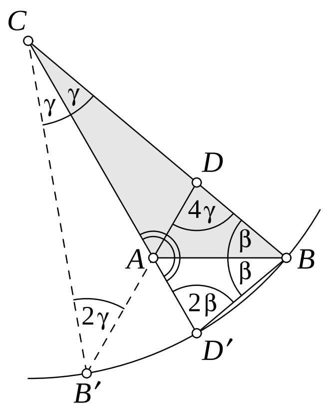
$\boxed{\text{W.86}}$ Im Dreieck ABC schneide die Winkelhalbierende von $\measuredangle CAB$ die Seite BC im Punkt D. Weiterhin sei $AB + AD = CD$ und $AC + AD = BC$. Man bestimme die Winkel $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle BCA$.
(*Crux Mathematicorum 2302*, Februar 1998)

W.86 (Bild) $\triangle ABC$ sei das gesuchte Dreieck. Wir spiegeln $\triangle ABC$ an der Seite AC; es entsteht zusätzlich der Punkt B'. Weiterhin wird $\triangle ABD$ an AB umgeklappt, und wir erhalten dadurch D' als spiegelbildlichen Punkt zu D. Dann ist offensichtlich $AB = AB'$ und somit die erste Bedingung



$$CD = AB + AD = AB' + AD = B'D$$

genau dann erfüllt, wenn $\triangle CDB'$ gleichschenklig ist. Ferner ist $AD = AD'$; also die zweite Bedingung

$$BC = AC + AD = AC + AD' = CD'$$

dann zutreffend, wenn B, D' (und B') auf einem Kreisbogen mit C als Mittelpunkt liegen. Da nun AD nach Voraussetzung die Winkelhalbierende von $\measuredangle CAB$ ist, also $\measuredangle CAD = \measuredangle DAB = \measuredangle BAD'$ gilt, und deren Summe 180° beträgt, folgt hieraus: $\measuredangle CAB \equiv \alpha = 120°$. Die Summe der beiden anderen Innenwinkel $\measuredangle ABC \equiv \beta$ und $\measuredangle BCA \equiv \gamma$ ist daher

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha = 60°. \qquad \text{(W.123)}$$

Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck CBD' folgt die Gleichung

$$4\beta + \gamma = 180°. \qquad \text{(W.124)}$$

Aus (W.123) und (W.124) folgen die gesuchten Winkel $\beta = 40°$ sowie $\gamma = 20°$.