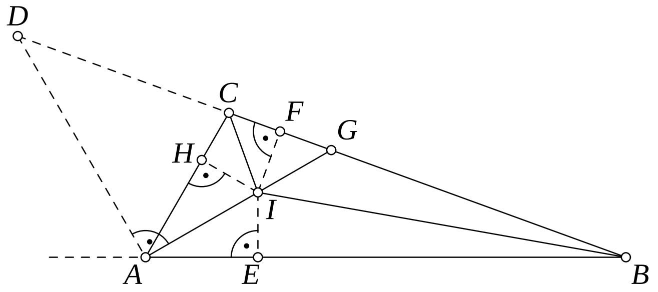
$\boxed{\text{W.87}}$ Angenommen, im $\triangle ABC$ erfüllen die Winkel β und γ die Bedingung $\gamma = 90° + \frac{1}{2}\beta$, die äußere Winkelhalbierende von α schneide die Verlängerung von BC in D, und die Seite AB berühre den Inkreis von $\triangle ABC$ in E. Man beweise: $CD = 2AE$.
(*Crux Mathematicorum 2303*, Februar 1998)

W.87 *Beweis:* (Bild) Jede Seite wird vom Inkreismittelpunkt I aus unter einem Winkel gesehen, der gleich dem um 90° vermehrten halben Gegenwinkel der Seite ist (vgl. Aufgabe D.9). Somit ist in unserem Dreieck gerade nach Voraussetzung $\measuredangle AIC = 90° + \frac{1}{2}\beta = \gamma$. Ist G der



Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden AI mit BC, so folgt aus $\measuredangle ACI = \measuredangle ICG = \frac{1}{2}\gamma$ und $\measuredangle CIG = 180° - \measuredangle AIC = 180° - \gamma$, daß auch $\measuredangle ICG = \frac{1}{2}\gamma$ gilt; $\triangle CIG$ hat gleiche Basiswinkel und ist daher gleichschenklig. F und H seien die beiden anderen Berührungspunkte des Inkreises von $\triangle ABC$ mit BC und AC. Mithin ist

$$2CF = CG. \tag{W.127}$$

Die Drachenvierecke $AHIE$ und $CHIF$ werden dann durch ihre Diagonalen AI und CI in jeweils kongruente Dreiecke $\triangle AHI \cong \triangle AEI$ bzw. $\triangle CHI \cong \triangle CFI$ zerlegt. Insbesondere ist also

$$AE = AH \quad \text{bzw.} \quad CH = CF. \tag{W.128}$$

Den Beweis führen wir nun aus der Ähnlichkeit der beiden Dreieckspaare:

$$\text{a) } \triangle ACG \sim \triangle AIC \quad \text{und} \quad \text{b) } \triangle ADG \sim \triangle FIC. \tag{W.129a,b}$$

Um dieses zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß sie jeweils in zwei Winkeln übereinstimmen. Im Fall a) ist $\measuredangle ACG = \measuredangle AIC = \gamma$ und $\measuredangle CGA = \measuredangle ICA = \frac{1}{2}\gamma$; im Fall b) $\measuredangle ICF = \measuredangle DGA = \frac{1}{2}\gamma$ und nach dem Satz, daß die Winkelhalbierenden der von zwei Seiten eingeschlossenen Winkel stets senkrecht aufeinander stehen (vgl. Aufgabe D.7): $\measuredangle GAD = \measuredangle CFI = 90°$. Aus (W.129a) folgt nun mit (W.127)

$$\frac{AG}{CG} = \frac{AC}{CI} \qquad \text{bzw.} \qquad AG \cdot CI = CG \cdot AC = 2CF \cdot AC; \tag{W.130}$$

aus (W.127b) mit (W.130)

$$\frac{DG}{AG} = \frac{CI}{CF} \qquad \text{bzw.} \qquad DG = \frac{AG \cdot CI}{CF} = \frac{2CF \cdot AC}{CF} = 2AC. \tag{W.131}$$

Schließlich ist wegen (W.127), (W.128) und (W.131)

$$CD = DG - CG = DG - 2CF = 2(AC - CF) = 2(AC - CH) =$$
$$= 2AH = 2AE. \ \square$$