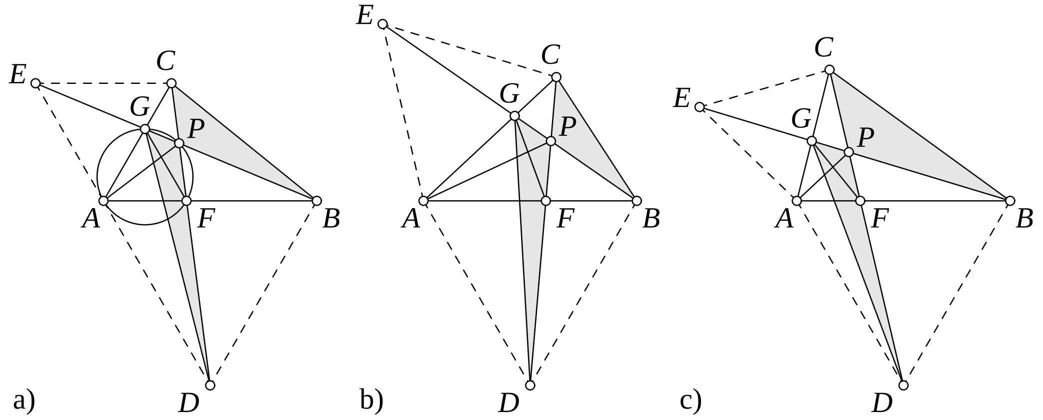
W.88 Über den Seiten AB und AC eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen zwei gleichseitige Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ACE$ errichtet. Die Strecke CD schneide AB in F; G sei der Schnittpunkt von BE und AC sowie P der von CD und BE. Unter der Voraussetzung, daß das Viereck $AFPG$ und das Dreieck PBC flächengleich sind, bestimme man den Winkel $\measuredangle BAC$.
(*Crux Mathematicorum 2304*, Februar 1998)

W.88 (Bild) Die beschriebene Konstruktion läßt sofort erkennen, daß es sich bei P um den Fermat-Punkt eines spitzwinkligen Dreiecks handelt (vgl. Aufgabe **D.54**). Von diesem Punkt aus wird jede Dreieckseite unter einem Winkel von $120°$ gesehen; somit ist $\measuredangle BPC = \measuredangle FPG = 120°$. Nehmen wir zunächst an, der gesuchte Winkel $\measuredangle BAC$ betrage $60°$ (Bild a). Dann ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel $\measuredangle FAG + \measuredangle FPG$ gleich einem Gestreckten, und $AFPG$ ist somit ein Sehnenviereck. $\measuredangle APF = 60° = \measuredangle AGF$ sind nun Winkel über derselben Sehne AF, woraus folgt, daß $\triangle AFG$ gleichseitig ist. Wegen der Voraussetzung $\measuredangle EAC = \measuredangle DAB = 60°$



sind die Punkte E, A und D kollinear und daher gilt $FG \parallel DA$. Nun können wir $\triangle FAG$ in das flächengleiche $\triangle FDG$ verwandeln und erhalten somit $[AFPG] = [PDG]$. Mit $AC \parallel DB$ und $\triangle PCG \sim \triangle PDB$ folgt

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PG}{PB}, \quad \text{oder} \quad PB \cdot PC = PD \cdot PG. \tag{W.132}$$

Erinnern wir uns an die Formel $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks, ist mit (W.132) sofort klar, daß beide gerasterte Flächen im Falle $\measuredangle BAC = 60°$ gleich groß sind. Gilt dagegen $\measuredangle BAC < 60°$ (Bild b), so ist $[FAG] > [FDG]$ und wir können die Ungleichungen

$$[AFPG] > [PDG] > [PBC]$$

aufstellen. Andererseits erhalten wir für $\measuredangle BAC > 60°$ (Bild c) die Ungleichungen

$$[AFPG] < [PDG] < [PBC].$$

Je kleiner der Winkel $\measuredangle BAC$ wird, desto kleiner wird auch das Verhältnis der Flächeninhalte $q \equiv [PBC]/[AFPG]$, so daß q eine monoton wachsende Funktion von $\measuredangle BAC$ ist. Daraus folgt, daß $\measuredangle BAC = 60°$ die einzige Lösung des Problems ist.