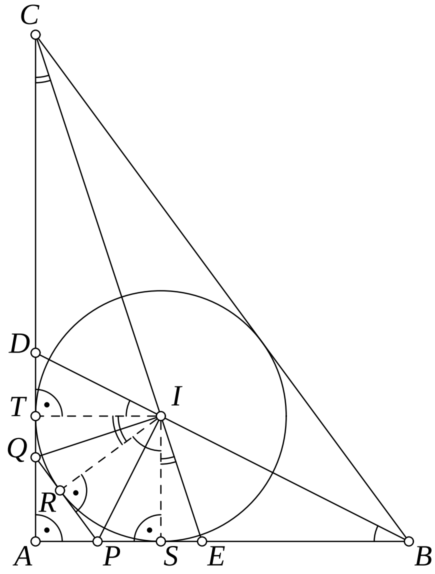
$\boxed{\text{W.89}}$ Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\measuredangle BAC = 90°$. I sei der Inkreismittelpunkt sowie D und E die Schnittpunkte von BI bzw. CI mit den Seiten AC bzw. AB. Man zeige:

$$\frac{BI^2 + ID^2}{CI^2 + IE^2} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

(*Crux Mathematicorum 2397*, Dezember 1998)

W.89 *Beweis:* (Bild) Die gegebenen Summen von Quadraten lassen den Satz des PYTHAGORAS erahnen, weshalb wir versuchen, rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten BI, ID bzw. CI, IE zu konstruieren. An den Inkreis von $\triangle ABC$ wird parallel zur Seite BC eine Tangente gezeichnet, die den Inkreis in R berührt sowie AB in P und AC in Q schneidet. Weiterhin seien S, T die Lotfußpunkte von I auf AB bzw. AC. Mit den üblichen Abkürzungen für die Innenwinkel erhalten wir unmittelbar: $\beta + \gamma = 90°$. Nun sind $RP = PS$ gleich lange Tangentenabschnitte, so daß die rechtwinkligen Dreiecke RIP und SIP kongruent sind. Da $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ ist, errechnen wir für den Außenwinkel von $\triangle APQ$:



$$\begin{aligned}\measuredangle QPB = \measuredangle RPS = 90° + \gamma &= 2\measuredangle RPI \\ &= 2(90° - \measuredangle RIP) = 2\measuredangle SPI.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\measuredangle RIP = 45° - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} = \measuredangle SIP \quad \text{und} \quad \measuredangle PIB = 180° - \measuredangle SPI - \frac{\beta}{2} = 90°.$$

Nach dem Kongruenzsatz WSW folgt daraus

$$\triangle SIP \cong \triangle TID, \quad \text{also} \quad IP = ID$$

(gleiche Stücke sind jeweils der rechte Winkel, der Inkreisradius und der Winkel $\measuredangle SIP = \measuredangle TID = \measuredangle ABD = \frac{1}{2}\beta$). Damit ist $\triangle PIB$ das gesuchte rechtwinklige Dreieck. Mit derselben Argumentation – angewandt auf die andere Kathete AC – können wir zeigen, daß ebenso $\triangle QIC$ rechtwinklig mit $IQ = IE$ ist. Schließlich folgt aus der oben erwähnten Ähnlichkeit

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP + PB}{AQ + QC} = \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC}, \quad \text{und nach Quadrieren}$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PB^2}{QC^2} = \frac{BI^2 + IP^2}{CI^2 + IQ^2} = \frac{BI^2 + ID^2}{CI^2 + IE^2}. \quad \square$$