A.1 Rekursionsgleichungen

In manchen Abzählproblemen ist es nicht einfach, die Lösung auf direktem Wege zu finden. Oft ist es jedoch möglich, die Lösung eines Problems mit einer bestimmten Größe durch die Lösung desselben Problems geringerer Größe auszudrücken. Diese Art von Abhängigkeit der Lösungen untereinander führt auf Rekursionsgleichungen. Obwohl es keine praktikable systematische Methode für die Lösung einer allgemeinen Rekursionsgleichung gibt, beschreibt dieser Abschnitt einige Verfahren, die auf spezielle Gleichungen angewandt werden können und dabei eine explizite Lösung des Abzählproblems liefern. Das Thema Rekursionsgleichungen erweist sich dabei als diskreter Gegensatz zu Konzepten, die aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen bekannt sind.

A.1.1 Grundlegende Konzepte

Definitionen:

Eine *Rekursionsbeziehung*† für die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist eine Gleichung, die das Folgeglied a_n mit bestimmten vorangehenden Gliedern a_i, $i < n$ für jedes $n \geq n_0$ in Beziehung setzt.

Eine Rekursionsbeziehung ist *linear*, falls a_n als eine lineare Funktion einer festen Anzahl vorangehender Glieder ausgedrückt werden kann. Anderenfalls heißt die Rekursionsbeziehung *nichtlinear*.

Eine Rekursionsbeziehung ist von *k-ter Ordnung*, falls a_n durch k vorangehende Glieder $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$ ausgedrückt wird.

Eine Rekursionsbeziehung ist *homogen*, falls die Nullfolge $a_0 = a_1 = \cdots = 0$ die Gleichung erfüllt. Anderenfalls heißt die Rekursionsbeziehung *inhomogen*.

Eine lineare homogene Rekursionsgleichung k-ter Ordnung *mit konstanten Koeffizienten* ist eine Gleichung der Form $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = 0$, $n \geq k$, wobei die C_i reelle Konstanten mit $C_n \neq 0, C_{n-k} \neq 0$ sind. *Anfangsbedingungen* für diese Rekursionsbeziehung legen bestimmte Werte für insgesamt k Folgenglieder a_i fest, typischerweise für $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

Fakten:

1. Eine lineare homogene Rekursionsgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann auch als $C_{n+k} a_{n+k} + C_{n+k-1} a_{n+k-1} + \cdots + C_n a_n = 0$, $n \geq 0$ geschrieben werden.

2. Es gibt stets eine unendliche Anzahl von Lösungsfolgen $\{a_n\}$ einer linearen homogenen Rekursionsgleichung k-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten).

3. Eine lineare homogene Rekursionsgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmt zusammen mit k Anfangsbedingungen unmittelbar aufeinander folgender Glieder $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ eindeutig die Folge $\{a_n\}$. Dieses ist für nichtlineare Gleichungen nicht notwendigerweise der Fall (s. Beispiel 2 unten) oder auch, wenn nicht aufeinander folgende Anfangsbedingungen vorgegeben werden (s. Beispiel 3).

†Die Bezeichnungen *Rekursionsbeziehung* und *Rekursionsgleichung* werden hier synonym verwendet.

4. Dieselbe Rekursionsbeziehung kann auf verschiedene Art und Weise geschrieben werden, indem die Indizes verschoben werden. Z. B. kann die Rekursionsbeziehung $a_n = 3a_{n-1}$, $n \geq 1$ auch als $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$ angegeben werden.

Beispiele:

1. Die Gleichung $a_n - a_{n-1}^2 + 2a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, ist eine nichtlineare homogene Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wenn noch die Anfangsbedingungen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ gestellt werden, wird dadurch eine eindeutige Folge $\{a_n\}$ definiert, deren erste Terme $0, 1, 1, -1, -1, 3, 11, 115, \ldots$ sind.

2. Die Rekursionsbeziehung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_{n+1}^2 - a_n = 3$, $a_0 = 1$, ist nichtlinear und inhomogen. Obwohl eine Anfangsbedingung vorgegeben ist, wird damit keine eindeutige Lösung festgelegt, denn die beiden Folgen $1, -2, 1, 2, \ldots$ und $1, -2, -1, \sqrt{2}, \ldots$ erfüllen sowohl die Rekursionsgleichung als auch die gegebene Anfangsbedingung.

3. Die Gleichung 2. Ordnung $a_{n+2} - a_n = 0$, $n \geq 0$, mit den nicht aufeinander folgenden Anfangsbedingungen $a_1 = a_3 = 0$ definiert keine eindeutige Lösung. Sowohl $a_n = (-1)^n + 1$ als auch $a_n = 2\,(-1)^n + 2$ befriedigen die Gleichung sowie die Anfangsbedingungen.

4. **Zinseszinsen.** Wenn eine Anfangsinvestition von P Euro bei einem jährlichen Zinssatz von r Prozent getätigt wird, wird der Wert a_n nach n Jahren durch die Beziehung $a_n = a_{n-1}(1 + \frac{r}{100})$, $n \geq 1$, mit $a_0 = P$ beschrieben. [Der Wert am Ende des n-ten Jahres ist gleich dem Wert a_{n-1} am Ende des vorhergehenden $(n-1)$-ten Jahres plus dem fälligen Zinsbetrag $\frac{r}{100}a_{n-1}$.]

5. **Fibonacci-Folge.** Die FIBONACCI-Zahlen erfüllen die lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, und die Anfangsbedingungen $a_0 = a_1 = 1$.

6. **Bitfolgen.** Sei a_n die Anzahl von unterschiedlichen Bitfolgen der Länge n. Dann ist $a_0 = 1$ (die leere Bitfolge) und $a_n = 2a_{n-1}$ für $n > 0$. [Jede Bitfolge der Länge $n-1$ erzeugt zwei Bitfolgen der Länge n, indem eine 0 bzw. eine 1 an das Ende der Folge mit der Länge $n-1$ angehängt werden.]

7. **Bitfolgen ohne aufeinander folgende Nullen.** S. Abschnitt A.1.2, Beispiel 12.

8. **Permutationen.** Sei a_n die Anzahl der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dann erfüllt a_n die lineare homogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung (mit nichtkonstanten Koeffizienten) $a_{n+1} = (n+1)a_n$, $n \geq 1$, $a_1 = 1$. Das folgt aus der Überlegung, dass jede n-Permutation π_n in eine $(n+1)$-Permutation durch Einfügen des $(n+1)$-ten Elementes an jede der $n+1$ möglichen Positionen überführt werden kann – sowohl am Anfang als auch am Ende von π_n oder zwischen zwei benachbarten Elementen von π_n. Um nach a_n aufzulösen wird die Rekursionsgleichung und ihre Anfangsbedingung wiederholt angewandt: $a_n = na_{n-1} = n(n-1)a_{n-2} = n(n-1)(n-2)a_{n-3} = \cdots = n(n-1)(n-2)\cdots 2a_1 = n!$.

9. **Catalansche Zahlen.** Die CATALANschen Zahlen erfüllen die nichtlineare homogene Rekursionsbeziehung $C_n - C_0C_{n-1} - C_1C_{n-2} - \cdots - C_{n-1}C_0 = 0$, $n \geq 1$,

mit der Anfangsbedingung $C_0 = 1$. Nimmt man das Produkt der $n+1$ Variablen $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$, dann bezeichnet C_n die Anzahl der Möglichkeiten, nach denen das Produkt durch paarweise Multiplikationen ausgerechnet werden kann. Z. B. gibt es fünf Möglichkeiten, das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ zu bilden: $((x_1x_2)x_3)x_4$, $(x_1(x_2x_3))x_4$, $(x_1x_2)(x_3x_4)$, $x_1((x_2x_3)x_4)$ und $x_1(x_2(x_3x_4))$. Egal wie die Multiplikationen auch ausgeführt werden, es wird stets ein Produkt mit äußeren Klammern der Form $(x_1x_2\cdots x_i)(x_{i+1}\cdots x_{n+1})$ geben. Die Anzahl der Möglichkeiten, nach denen das Produkt $x_1x_2\cdots x_i$ gebildet werden kann, ist C_{i-1}, und die Anzahl der Möglichkeiten, nach denen das Produkt $x_{i+1}\cdots x_{n+1}$ gebildet werden kann, ist C_{n-i}. Daher kann $(x_1x_2\cdots x_i)(x_{i+1}\cdots x_{n+1})$ auf $C_{i-1}C_{n-i}$ verschiedene Weisen erhalten werden. Summation über alle Werte $i = 1, 2, \ldots, n$ liefert die obige Rekursionsgleichung.

10. **Turm von Hanoi.** Das Turm von Hanoi-Puzzle besteht aus drei Pfählen, die auf ein Brett montiert sind, und n Ringen von unterschiedlicher Größe. Zu Beginn sind die Ringe mit abnehmender Größe von unten nach oben auf dem ersten Pfahl übereinander gestapelt. Die Regeln erlauben es, in einzelnen Zügen nacheinander jeweils einen Ring von einem Stapel herunter zu nehmen und auf einen anderen Stapel zu legen, wobei niemals ein größerer Ring auf einen kleineren gelegt werden darf. Das Ziel des Puzzles ist es, den gesamten Turm auf den zweiten Pfahl umzuschichten, wiederum mit dem größten Ring zuunterst. Wie viel Züge sind mindestens erforderlich, um das Puzzle mit 64 Ringen zu lösen?

    Sei a_n die minimale Anzahl von Zügen, um das Turm von Hanoi-Puzzle mit n Ringen zu lösen. Um die $n-1$ kleinsten Ringe von Pfahl 1 auf Pfahl 3 umzuschichten, benötigt man a_{n-1} Züge. Ein weiterer Zug ist erforderlich, um danach den größten Ring auf Pfahl 2 zu legen, und um anschließend die $n-1$ Ringe wieder in umgekehrter Reihenfolge von Pfahl 3 auf Pfahl 2 zu bringen, werden a_{n-1} Züge durchgeführt. Mithin kann das Puzzle mit n Ringen in $2a_{n-1}+1$ Zügen gelöst werden, und zwar in nicht weniger Zügen, weil sonst das Puzzle mit $n-1$ Ringen im Widerspruch zur Voraussetzung in weniger als a_{n-1} Zügen gelöst werden könnte. Demzufolge gilt $a_n = 2a_{n-1}+1$. Die Anfangsbedingung ist $a_1 = 1$. Eine wiederholte Anwendung der Rekursionsgleichung zeigt nun, dass $a_n = 2a_{n-1}+1 = 2^2a_{n-2}+2+1 = \cdots = 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1$. Somit sind mindestens $2^{64}-1$ Züge erforderlich, um dieses Puzzle mit 64 Ringen zu lösen.

11. **Surjektive Funktionen.** Die Anzahl von surjektiven Funktionen $\varphi : A \to B$ kann durch Aufstellen einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung, die von der Größe der Menge B ausgeht, ermittelt werden. Sei $|A| = m$ die Mächtigkeit der Menge A und a_n die Anzahl der surjektiven Funktionen von A auf eine Menge mit n Elementen. Dann gilt $a_n = n^m - \binom{n}{1}a_1 - \binom{n}{2}a_2 - \cdots - \binom{n}{n-1}a_{n-1}$, $n \geq 2$, $a_1 = 1$. Diese Gleichung folgt aus der Tatsache, dass die Gesamtzahl der Funktionen von A nach B gleich n^m ist und die Anzahl der Funktionen, die A auf eine Untermenge von B, bestehend aus genau j Elementen, abbildet, gleich $\binom{n}{j}a_j$ ist.

    Z. B. erhält man für $m = 7$ und $n = 4$ aus der Rekursionsbeziehung $a_2 = 2^7 - 2\cdot 1 = 126$, $a_3 = 3^7 - 3\cdot 1 - 3\cdot 126 = 1\,806$, $a_4 = 4^7 - 4\cdot 1 - 6\cdot 126 - 4\cdot 1\,806 = 8\,400$. Somit gibt es 8 400 verschiedene surjektive Funktionen in diesem Fall.

A.1.2 Homogene Rekursionsbeziehungen

Im folgenden Abschnitt wird angenommen, dass die Rekursionsgleichungen linear sind und konstante Koeffizienten haben.

Definitionen:

Für eine *geometrische Folge* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gilt $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = r$, wobei r der *Quotient* der Folge heißt.

Die *charakteristische Gleichung* der homogenen Rekursionsgleichung k-ter Ordnung

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = 0, \quad n \geq k,$$

ist die Gleichung $C_n r^k + C_{n-1} r^{k-1} + \cdots + C_{n-k} = 0$. Die *charakteristischen Wurzeln* sind die Wurzeln dieser Gleichung.

Die Folgen $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \ldots, \{a_n^{(k)}\}$ sind *linear abhängig*, wenn es irgendwelche Konstanten $t_1, t_2, \ldots, t_k$ gibt, die ihrerseits nicht sämtlich verschwinden, so dass $\sum_{i=1}^{k} t_i a_n^{(i)} = 0$ für alle $n \geq 0$ erfüllt ist. Anderenfalls heißen sie *linear unabhängig*.

Fakten:

1. **Allgemeine Methode zur Lösung einer linearen homogenen Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten.** Sie lautet: Stelle zuerst die allgemeine Lösung auf. Dann wende die Anfangsbedingungen an, um die spezielle Lösung zu finden.

2. Falls die k charakteristischen Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_k$ voneinander verschieden sind, dann sind $r_1^n, r_2^n, \cdots, r_k^n$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Rekursionsgleichung. Deren allgemeine Lösung lautet

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \cdots + c_k r_k^n,$$

   wobei $c_1, c_2, \ldots, c_k$ beliebige Konstanten sind.

3. Wenn eine charakteristische Wurzel r die Vielfachheit m besitzt, dann sind $r^n, nr^n, \ldots, n^{m-1} r^n$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Rekursionsgleichung. Die Linearkombination $c_1 r^n + c_2 n r^n + \cdots + c_m n^{m-1} r^n$ ist dann ebenfalls eine Lösung, wobei $c_1, c_2, \ldots, c_m$ wieder beliebige Konstanten sind.

4. Die Fakten 2 und 3 können kombiniert werden: Falls es k charakteristische Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_k$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_k$ gibt (wobei einige der m_i durchaus gleich 1 sein können), ist die allgemeine Lösung eine Summe von solchen Summen, wie sie im Fakt 3 auftreten.

5. **Satz von DeMoivre.** Für jede positive ganze Zahl n gilt

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

   Dieser Satz wird benutzt, wenn Lösungen von Rekursionsgleichungen gesucht werden, deren charakteristische Wurzeln komplexe Zahlen sind. (S. Beispiel 10.)

6. **Lösung von Rekursionsgleichungen 1. Ordnung.** Die Lösung der homogenen Rekursionsgleichung $a_{n+1} = da_n$, $n \geq 0$, mit der Anfangsbedingung $a_0 = A$ lautet $a_n = Ad^n$, $n \geq 0$.

7. **Lösung von Rekursionsgleichungen 2. Ordnung.** Seien r_1, r_2 die charakteristischen Wurzeln der homogenen Rekursionsgleichung 2. Ordnung

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0.$$

Hierbei gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

- r_1, r_2 sind voneinander verschiedene reelle Zahlen: r_1^n und r_2^n sind dann linear unabhängige Lösungen der Rekursionsgleichung. Die allgemeine Lösung hat die Form

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

wobei die Konstanten c_1, c_2 aus Werten von a_n für zwei verschiedene n (oftmals $n = 0, 1$) ermittelt werden.

- r_1, r_2 bilden ein konjugiert komplexes Paar $a \pm ib$: Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall

$$a_n = c_1(a + \mathrm{i}b)^n + c_2(a - \mathrm{i}b)^n = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^n (k_1 \cos n\theta + k_2 \sin n\theta),$$

wobei $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ ist. Hier sind $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \cos n\theta$ und $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \sin n\theta$ linear unabhängige Lösungen.

- r_1, r_2 sind reell und gleich: r_1^n und nr_1^n sind linear unabhängige Lösungen der Rekursionsgleichung. Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_1^n.$$

Beispiele:

1. Die geometrische Folge $7, 21, 63, 189, \ldots$ mit dem Quotienten 3 erfüllt die homogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung $a_{n+1} - 3a_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

2. Die homogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, bestimmt keine *eindeutige* geometrische Folge. Jede geometrische Folge mit dem Quotienten 3 stellt eine Lösung dar, z. B. die geometrische Folge in Beispiel 1 (mit $a_0 = 7$) oder die geometrische Folge $5, 15, 45, 135, \ldots$ (mit $a_0 = 5$).

3. Die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, $a_0 = 7$ kann leicht mittels Fakt 6 (s. oben) gelöst werden. Die allgemeine Lösung lautet $a_n = 7 \cdot 3^n$ für alle $n \geq 0$.

4. **Zinseszinsen.** Wie lange dauert es, bis 500 Euro durch Zinseszinsen verdoppelt werden, wenn der jährliche Zinssatz 8% beträgt, die Zinsen aber vierteljährlich dem Guthaben zugeschlagen werden? Sei a_n das Guthaben, nachdem n Vierteljahre verstrichen sind, dann ist $a_{n+1} = a_n + 0{,}02\,a_n = 1{,}02\,a_n$, $n \geq 0$, $a_0 = 500$. [Der vierteljährliche Zinssatz beträgt hier $0{,}08/4 = 0{,}02 = 2\%$.] Nach Fakt 6 ist die Lösung $a_n = 500 \cdot 1{,}02^n$, $n \geq 0$. Das Guthaben verdoppelt sich also, wenn $1\,000 = 500 \cdot 1{,}02^n$, somit $n = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} \approx 35{,}003$. Folglich wird sich das anfängliche Guthaben von 500 Euro nach rund 35 Vierteljahren (oder $8\frac{3}{4}$ Jahren) verdoppeln.

5. **Populationswachstum.** Die Anzahl von Bakterien in einer Kultur verdreifache sich näherungsweise jede Stunde. Wenn nach 6 Stunden ca. 100 000 Bakterien vorhanden sind, wie viel waren es dann zu Beginn? Sei p_n die Anzahl der Bakterien, nachdem n Stunden vergangen sind. Dann gilt $p_{n+1} = 3p_n$ für $n \geq 0$. Nach Fakt 6 folgt $p_n = p_0 \cdot 3^n$, also $100\,000 = p_0 \cdot 3^6$ und damit $p_0 \approx 137$.

6. **Fibonacci-Folge.** Die FIBONACCI-Folge $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ taucht in vielen Anwendungen auf. Ihre Glieder erfüllen die homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, mit den Anfangswerten $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

   Eine explizite Formel für F_n kann mit Hilfe von Fakt 7 ermittelt werden. Die charakteristische Gleichung ist hier $r^2 - r - 1 = 0$ mit den voneinander verschiedenen Wurzeln $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Daher lautet die allgemeine Lösung

   $$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   Unter Beachtung der Anfangsbedingungen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ erhält man $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ und damit die explizite Formel

   $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right], \quad n \geq 0.$$

7. **Lucas-Folge.** Die Folge der LUCAS-Zahlen $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ ist eng mit den FIBONACCI-Zahlen verwandt. Die Glieder dieser Folge erfüllen genau dieselbe homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$, jedoch mit den anderen Anfangsbedingungen $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Die explizite Formel für L_n ist

   $$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 0.$$

8. **Random walk.** Ein Teilchen führe eine Zufallsbewegung in einer Dimension aus, z. B. entlang der x-Achse. An den Stellen $x = 0$ und $x = T$ seien Barrieren aufgestellt. Bei jedem Zeitschritt bewegt sich das Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit p um eine Längeneinheit nach rechts bzw. mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ um eine Einheit nach links. Sei a_n die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen, wenn es an der Position $x = n$ startet, die Barriere $x = T$ eher erreicht als die andere Barriere $x = 0$. Man kann nun zeigen, dass a_n die Rekursionsgleichung 2. Ordnung $a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$ oder $pa_{n+1} - a_n + qa_{n-1} = 0$ erfüllt. Im vorliegenden Fall sind die beiden Anfangsbedingungen $a_0 = 0$ und $a_T = 1$. Die charakteristische Gleichung $pr^2 - r + q = (pr - q)(r - 1) = 0$ hat die charakteristischen Wurzeln 1 bzw. $\frac{q}{p}$. Für $p \neq q$ sind die Wurzeln verschieden voneinander, und es kann der erste Fall von Fakt 7 angewandt werden, um a_n zu bestimmen; für $p = q$ muss dagegen der dritte Fall von Fakt 7 benutzt werden. Man erhält:

   $$a_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^T - 1} & \text{für } p \neq q, \\ \frac{n}{T} & \text{für } p = q. \end{cases}$$

9. Die Gleichung 2. Ordnung $a_n+4a_{n-1}-21a_{n-2}=0$, $n \geq 2$, hat die charakteristische Gleichung $r^2+4r-21=0$ mit den unterschiedlichen Wurzeln 3 und -7. Die allgemeine Lösung der Rekursionsbeziehung lautet

$$a_n = c_1\,3^n + c_2(-7)^n, \quad n \geq 0,$$

wobei c_1, c_2 beliebige Konstanten sind. Sind die Anfangsbedingungen $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$, so ergibt die Lösung des Gleichungssystems $1 = a_0 = c_1 + c_2$, $1 = a_1 = 3c_1 - 7c_2$ die Werte $c_1 = \frac{4}{5}$, $c_2 = \frac{1}{5}$. Die eindeutige Lösung lautet hier

$$a_n = \frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5}(-7)^n, \quad n \geq 0.$$

10. Die Gleichung 2. Ordnung $a_n-6a_{n-1}+58a_{n-2}=0$, $n \geq 2$, hat die charakteristische Gleichung $r^2-6r+58=0$ mit den konjugiert komplexen Wurzeln $3 \pm 7\mathrm{i}$. Die allgemeine Lösung ist

$$a_n = c_1(3+7\mathrm{i})^n + c_2(3-7\mathrm{i})^n, \quad n \geq 0.$$

Mit Fakt 5 folgt weiter: $(3+7\mathrm{i})^n = [\sqrt{3^2+7^2}\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)]^n = (\sqrt{58})^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$ mit $\theta = \arctan\frac{7}{3}$. Ähnlich findet man $(3-7\mathrm{i})^n = (\sqrt{58})^n(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta)$. Das ergibt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{58})^n\,[(c_1+c_2)\cos n\theta + \mathrm{i}(c_1-c_2)\sin n\theta] \\ &= (\sqrt{58})^n\,[k_1\cos n\theta + k_2\sin n\theta]. \end{aligned}$$

Werden als Anfangsbedingungen wieder $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$ vorgegeben, dann folgt $1 = a_0 = k_1$, $1 = a_1 = \sqrt{58}\,[\cos\theta + k_2\sin\theta]$, welches auf $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{2}{7}$ führt. Somit ist

$$a_n = (\sqrt{58})^n \left[\cos n\theta - \frac{2}{7}\sin n\theta\right], \quad n \geq 0.$$

11. Die Gleichung 2. Ordnung $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$, $n \geq 0$, hat die charakteristische Gleichung $r^2-6r+9=(r-3)^2=0$ mit der Doppelwurzel $3, 3$. Die allgemeine Lösung dieser Rekursion ist

$$a_n = c_1\,3^n + c_2 n\,3^n, \quad n \geq 0.$$

Sind als Anfangswerte $a_0 = 2$ und $a_1 = 4$ vorgegeben, dann folgt $2 = a_0 = c_1$, $4 = a_1 = 2\cdot 3 + c_2\,1\cdot 3$, welches $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{2}{3}$ ergibt. Daher ist

$$a_n = 2\cdot 3^n - \frac{2}{3}n\,3^n = 2\,(3^n - n\,3^{n-1}), \quad n \geq 0.$$

12. Für $n \geq 1$ sei a_n die Anzahl von Bitfolgen der Länge n ohne aufeinander folgende Nullen. Dabei ist $a_1 = 2$ (die beiden Folgen 0 und 1) und $a_2 = 3$ (die Folgen 01, 10, 11). Für $n \geq 3$ endet eine derartige Bitfolge entweder mit einer 1 oder 0. Wenn das n-te Bit 1 ist, liefern die vorangehenden $n-1$ Bits bereits durch a_{n-1} erfasste Folgen; falls das n-te Bit dagegen 0 ist, müssen die letzten beiden

Bits 10 sein und die vorangehenden $n-2$ Bits bilden eine Folge, die durch a_{n-2} mitgezählt wird. Somit gilt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, mit $a_1 = 2$ und $a_2 = 3$. Die Lösung dieser Rekursionsbeziehung ist schlicht $a_n = F_{n+2}$, nämlich die um zwei Positionen verschobene FIBONACCI-Folge. Eine explizite Formel für a_n ist in Beispiel 6 angegeben.

13. Die Rekursionsgleichung 3. Ordnung $a_{n+3} - a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$, $n \geq 0$, hat die charakteristische Gleichung $r^3 - r^2 - 4r + 4 = (r-2)(r+2)(r-1) = 0$ mit den charakteristischen Wurzeln 2, -2 und 1. Die allgemeine Lösung lautet

$$a_n = c_1\, 2^n + c_2\,(-2)^n + c_3\, 1^n = c_1\, 2^n + c_2\,(-2)^n + c_3, \quad n \geq 0.$$

14. Die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung 3. Ordnung $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$, $n \geq 0$, ist

$$a_n = c_1\, 1^n + c_2 n\, 1^n + c_3 n^2\, 1^n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2, \quad n \geq 0.$$

Die charakteristischen Wurzeln sind hier 1, 1, 1.

15. Die Gleichung 4. Ordnung $a_{n+4} + 2a_{n+2} + a_n = 0$, $n \geq 0$, hat die charakteristische Gleichung $r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = 0$. Da die charakteristischen Wurzeln $\pm\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{i}$ sind, lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 \mathrm{i}^n + c_2(-\mathrm{i})^n + c_3 n \mathrm{i}^n + c_4 n(-\mathrm{i})^n \\ &= k_1 \cos\frac{n\pi}{2} + k_2 \sin\frac{n\pi}{2} + k_3 n \cos\frac{n\pi}{2} + k_4 n \sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

A.1.3 Inhomogene Rekursionsbeziehungen

Im folgenden Abschnitt wird angenommen, dass die Rekursionsgleichungen linear sind und konstante Koeffizienten haben.

Definition:

Die *inhomogene* Rekursionsgleichung k-ter Ordnung hat die Form

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = f(n), \quad n \geq k,$$

wobei $C_n \neq 0$, $C_{n-k} \neq 0$ und $f(n) \neq 0$ für mindestens ein n.

Fakten:

1. **Allgemeine Lösung.** Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Rekursionsgleichung k-ter Ordnung hat die Form

$$a_n = a_n^{(\mathrm{h})} + a_n^{(\mathrm{p})},$$

wobei $a_n^{(\mathrm{h})}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = 0, \quad n \geq k,$$

und $a_n^{(\mathrm{p})}$ eine spezielle Lösung der gegebenen Gleichung $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \cdots + C_{n-k} a_{n-k} = f(n)$, $n \geq k$, ist.

2. Gegeben sei die inhomogene Gleichung 1. Ordnung $C_n a_n + C_{n-1}a_{n-1} = kr^n$, $n \geq 1$, mit von Null verschiedenen Konstanten r und k.
   - Wenn r^n *keine* Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist, dann ist $a_n^{(\mathrm{p})} = Ar^n$ mit einer Konstanten A.
   - Wenn r^n eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist, dann ist $a_n^{(\mathrm{p})} = Bnr^n$ mit einer Konstanten B.
3. Gegeben sei die inhomogene Gleichung 2. Ordnung $C_n a_n + C_{n-1}a_{n-1} + C_{n-2}a_{n-2} = kr^n$, $n \geq 2$, mit von Null verschiedenen Konstanten r und k.
   - Wenn r^n *keine* Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist, dann ist $a_n^{(\mathrm{p})} = Ar^n$ mit einer Konstanten A.
   - Wenn $a_n^{(\mathrm{h})} = c_1 r^n + c_2 r_1^n$ mit $r \neq r_1$, dann $a_n^{(\mathrm{p})} = Bnr^n$ mit einer Konstanten B.
   - Wenn $a_n^{(\mathrm{h})} = c_1 r^n + c_2 n r_1^n$ mit $r \neq r_1$, dann $a_n^{(\mathrm{p})} = Cn^2 r^n$ mit einer Konstanten C.
4. Gegeben sei die inhomogene Rekursionsgleichung k-ter Ordnung $C_n a_n + C_{n-1}a_{n-1} + \cdots + C_{n-k}a_{n-k} = f(n)$. Falls $f(n)$ ein konstantes Vielfaches der in der ersten Spalte von Tabelle A.1 aufgeführten Funktionen ist, dann ergibt sich die zugehörige *Musterlösung* $t(n)$ aus der entsprechenden zweiten Spalte der Tabelle. [Dabei sind $A, B, A_0, A_1, \ldots, A_t, r, \alpha$ reelle Konstanten.]
   - Falls kein Summand von $t(n)$ die zugehörige homogene Gleichung löst, dann ist $a_n^{(\mathrm{p})} = t(n)$ eine spezielle Lösung.
   - Falls ein Summand von $t(n)$ die zugehörige homogene Gleichung löst, so multipliziere $t(n)$ mit der *kleinsten* (positiv ganzzahligen) Potenz von n – etwa n^s, so dass kein Summand der angepassten Musterlösung $n^s t(n)$ die zugehörige homogene Gleichung löst. Dann ist $a_n^{(\mathrm{p})} = n^s t(n)$ eine spezielle Lösung.
   - Falls $f(n)$ eine Summe von konstanten Vielfachen der in Spalte 1 der Tabelle A.1 aufgeführten Funktionen ist, dann werden die angepassten Musterlösungen für jeden Summanden durch die beiden vorangehenden Teile von Fakt 4 gebildet. Diese Summanden addiert, liefert eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Tabelle A.1. Spezielle Musterlösungen von $C_n a_n + \cdots + C_{n-k}a_{n-k} = h(n)$

$h(n)$	$t(n)$
c, eine Konstante	A
n^t (mit t als positiver ganzer Zahl)	$A_t n^t + A_{t-1}n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
r^n	Ar^n
$\sin \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n \left(A_t n^t + A_{t-1}n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0\right)$
$r^n \sin \alpha n$	$r^n \left(A \sin \alpha n + B \cos \alpha n\right)$
$r^n \cos \alpha n$	$r^n \left(A \sin \alpha n + B \cos \alpha n\right)$

Beispiele:

1. Betrachte die inhomogene Gleichung $a_n + 4a_{n-1} - 21a_{n-2} = 5\,(4^n)$, $n \geq 2$. Die Lösung ist $a_n = a_n^{(\mathrm{h})} + a_n^{(\mathrm{p})}$, wobei $a_n^{(\mathrm{h})}$ die Lösung von $a_n + 4a_{n-1} - 21a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, ist. Somit gilt

$$a_n^{(\mathrm{h})} = c_1\,(3)^n + c_2\,(-7)^n, \quad n \geq 0.$$

Nach der dritten Zeile aus Tabelle A.1 gilt $a_n^{(\mathrm{p})} = A\,(4^n)$ mit irgendeiner Konstanten A. Dieses in die gegebene inhomogene Gleichung eingesetzt, ergibt $A\,(4^n) + 4A\,(4^{n-1}) - 21A\,(4^{n-2}) = 5\,(4^n)$. Nach Division durch 4^{n-2} erhält man $16A + 16A - 21A = 80$ oder $A = \frac{80}{11}$. Folglich ist

$$a_n = c_1\,(3)^n + c_2\,(-7)^n + \frac{80}{11}\,4^n, \quad n \geq 0.$$

Wenn die Anfangsbedingungen $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$ sind, bestimmen sich c_1 und c_2 aus $1 = c_1 + c_2 + \frac{80}{11}$, $2 = 3c_1 - 7c_2 + \frac{320}{11}$ zu

$$a_n = -\frac{71}{10}\,(3^n) + \frac{91}{110}\,(-7)^n + \frac{80}{11}\,(4^n), \quad n \geq 0.$$

2. Angenommen, die vorgegebene Rekursionsgleichung sei $a_n + 4a_{n-1} - 21a_{n-2} = 8\,(3^n)$, $n \geq 2$. Dann gilt immer noch

$$a_n^{(\mathrm{h})} = c_1\,(3)^n + c_2\,(-7)^n, \quad n \geq 0$$

mit beliebigen Konstanten c_1 und c_2. Wegen des zweiten Teils von Fakt 3 ist eine spezielle Lösung hier $a_n^{(\mathrm{p})} = An3^n$. Substitution von $a_n^{(\mathrm{p})}$ führt auf $An3^n + 4A(n-1)3^{n-1} - 21A(n-2)3^{n-2} = 8\,(3^n)$. Division durch 3^{n-2} liefert $9An + 12A(n-1) - 21A(n-2) = 72$, also $A = \frac{12}{5}$. Deshalb ist

$$a_n = c_1\,(3)^n + c_2\,(-7)^n + \frac{12}{5} n\,3^n, \quad n \geq 0.$$

3. **Turm von Hanoi.** (S. Beispiel 10 aus A.1.1.) Wenn a_n die minimale Anzahl von Zügen bezeichnet, die zum Umschichten der n Ringe nötig sind, dann befriedigt a_n die inhomogene Gleichung 1. Ordnung

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1,$$

wobei $a_0 = 0$ ist. Hier gilt $a_n^{(\mathrm{h})} = c\,(2^n)$ mit einer beliebigen Konstanten c sowie $a_n^{(\mathrm{p})} = A$ nach Zeile 1 aus Tabelle A.1. Also ist $A = 2A + 1$ oder $A = -1$. Mithin folgt aus $a_n = c\,(2^n) - 1$ und $0 = a_0 = c\,(2^0) - 1$ die Konstante $c = 1$, also

$$a_n = 2^n - 1, \quad n \geq 0.$$

4. In wie viel Gebiete wird die Ebene durch n Geraden in allgemeiner Lage (keine zwei parallel und keine drei mit gemeinsamen Schnittpunkt) geteilt? Mit a_n als Anzahl der derart gebildeten Regionen kann $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 7$ leicht ermittelt werden. Eine allgemeine Beziehung kann durch Aufstellen einer Rekursionsgleichung gefunden werden. Wird nämlich die $(n+1)$-te Gerade durch die bisherigen a_n Gebiete, die durch n Geraden gebildet werden, gezogen, so schneidet diese neue Gerade alle anderen n Geraden. Die Schnittpunkte zerteilen die $(n+1)$-te Gerade in $n+1$ Abschnitte, wobei jeder dieser Abschnitte ein vorhandenes Gebiet in zwei teilt. Als Ergebnis dieser Überlegung erhält man die inhomogene Rekursionsbeziehung 1. Ordnung $a_{n+1} = a_n + (n+1)$, $n \geq 1$. Eine Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $a_1 = 2$ liefert die Formel $a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

A.1.4 Die Methode der erzeugenden Funktionen

Erzeugende Funktionen erlauben es, sowohl einzelne Rekursionsbeziehungen als auch Systeme von Rekursionsgleichungen zu lösen. Dieses Vorgehen ist analog zur Anwendung der LAPLACE-Transformation bei der Lösung von Differentialgleichungssystemen.

Fakten:

1. Um die Rekursionsbeziehung $C_{n+k}a_{n+k} + \cdots + C_n a_n = f(n)$, $n \geq 0$, zu lösen, führe folgende Schritte aus:

   - multipliziere beide Seiten der Rekursionsgleichung mit x^{n+k} und summiere anschließend über alle n von $n = 0$ bis unendlich;
   - schreibe diese neue Gleichung unter Verwendung der erzeugenden Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ um und löse diese Gleichung nach $f(x)$ auf;
   - führe eine Reihenentwicklung des gefundenen Ausdrucks für $f(x)$ nach Potenzen von x durch (ggf. ist dazu eine Partialbruchzerlegung erforderlich), so dass die Koeffizienten a_n abgelesen werden können. Dies kann durch Taylorreihenentwicklung oder geschickte Ausnutzung der Reihenformel einer geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ geschehen.

2. Um ein System von Rekursionsbeziehungen k-ter Ordnung zu lösen, führe folgende Schritte aus:

   - multipliziere beide Seiten jeder Rekursionsgleichung mit x^{n+k} und summiere anschließend über alle n von $n = 0$ bis unendlich;
   - schreibe dieses neue Gleichungssystem unter Verwendung der erzeugenden Funktion $f(x)$, $g(x)$, … für a_n, b_n, … um und löse dieses nach den erzeugenden Funktionen auf;
   - führe eine Reihenentwicklung der gefundenen Ausdrücke für die erzeugenden Funktionen nach Potenzen von x durch, so dass die Koeffizienten $a_n, b_n, \ldots$ abgelesen werden können.

Beispiele:

1. Die inhomogene Rekursionsbeziehung erster Ordnung $a_{n+1} - 2a_n = 1$, $n \geq 0$, $a_0 = 0$, tritt im *Turm von Hanoi*-Problem auf (Beispiel 3 in A.1.3). Beginne damit, den ersten Schritt von Fakt 1 anzuwenden:

$$a_{n+1}x^{n+1} - 2a_n x^{n+1} = x^{n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

Danach führe den zweiten Schritt von Fakt 1 durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$[f(x) - a_0] - 2xf(x) = (1-2x)f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Auflösen nach $f(x)$ ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)\,x^n. \end{aligned}$$

Da a_n der Koeffizient von x^n in $f(x)$ ist, folgt $a_n = 2^n - 1$, $n \geq 0$.

2. Zur Lösung der inhomogenen Rekursionsbeziehung zweiter Ordnung $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ wende den ersten Schritt von Fakt 1 an:

$$a_{n+2}x^{n+2} - 2a_{n+1}x^{n+2} + a_n x^{n+2} = 2^n x^{n+2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+2}.$$

Der zweite Schritt von Fakt 1 liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n,$$

$$[f(x) - a_0 - a_1 x] - 2x[f(x) - a_0] + x^2 f(x) = \frac{x^2}{1-2x},$$

$$[f(x) - 1 - 2x] - 2x[f(x) - 1] + x^2 f(x) = \frac{x^2}{1-2x}.$$

Auflösen nach $f(x)$ ergibt

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Somit ist $a_n = 2^n$, $n \geq 0$, die Lösung der obigen Rekursionsbeziehung.

3. Fakt 2 kann benutzt werden, um das System von Rekursionsbeziehungen

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} &= -a_n + 2b_n - 1 \end{aligned}$$

für $n \geq 0$ mit $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$ zu lösen. Multiplikation mit x^{n+1} und Summation ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} &= -x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungen können, ausgedrückt durch die erzeugenden Funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} f(x) - a_0 &= 2xf(x) - xg(x) + 2x\frac{1}{1-x} \\ g(x) - b_0 &= -xf(x) + 2xg(x) - x\frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems (mit $a_0 = 0$, $b_0 = 1$) liefert

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{-3/4}{1-x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-3x} \\ &= -\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \\ &= -\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1-4x+2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{3/4}{1-x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{-1/4}{1-3x} \\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}3^n, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{4}3^n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$